



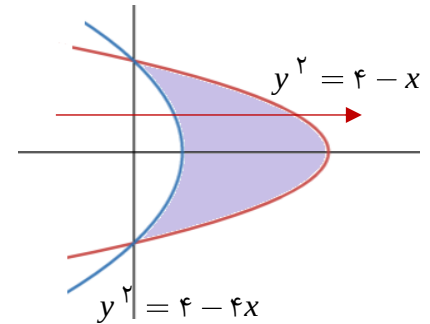
۱- گزینه ۳ صحیح است.

مساحت انتگرال دوگانه با انتگرالده ۱ است. ناحیه را رسم می کنیم. همانطور که از شکل مشخص است x -منظم است.

$$S_D = \iint_D dA$$

شکل متقارن است پس مساحت ناحیه بالای محور x ها را محاسبه کرده و ۲ برابر می کنیم.

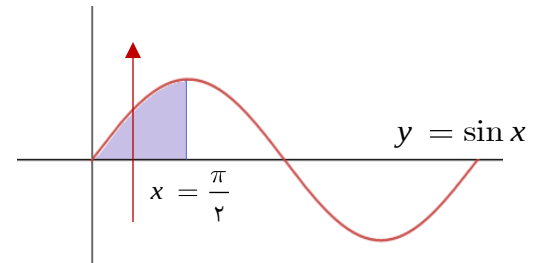
$$S_D = 2 \int_0^2 \int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx dy$$



۲- گزینه ۲ درست است.

چون حل نسبت به x دشوار است از روش تعویض ترتیب استفاده می کنیم.

$$\text{رسم ناحیه (گام اول): } \begin{cases} \sin^{-1} y \leq x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin^{-1} y = x \rightarrow y = \sin x \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dy dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\frac{u^2 = 1 + \cos^2 x}{-2 \cos x \sin x = -2u du} \rightarrow I = -\frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^1 (u)(2u du) = \int_{\sqrt{2}}^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^1 = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3}$$

۳- گزینه ۱ صحیح است.

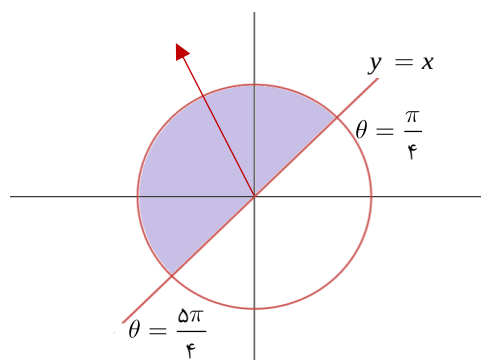
با کمک تغییر متغیر انتگرال را ساده می‌کنیم و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 2y \end{cases} \Rightarrow J = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \quad \begin{cases} 1 \leq x - 2y \leq 2 \\ 1 \leq x + 2y \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 1 \leq v \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int_1^2 \int_1^3 \frac{u^3}{v^3} dv du = \frac{1}{4} \left(\int_1^2 u^3 du \right) \left(\int_1^3 \frac{dv}{v^3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{u^4}{4} \Big|_1^2 \right) \left(-\frac{1}{2v^2} \Big|_1^3 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{16-1}{4} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{18} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{15}{4} \times \frac{8}{18} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

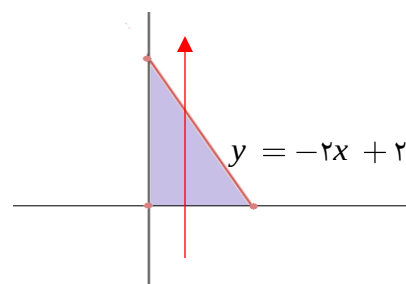
$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{1+r^2} = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\theta \right) \left(\int_0^1 \frac{r dr}{1+r^2} \right) \\ &= (\pi) \left(\frac{1}{2} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2} \ln 2 \end{aligned}$$



۵- گزینه ۳ صحیح است.

جرم انتگرال دوگانه چگالی است.

$$M = \iint_D P(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} (1+2x+y) dy dx$$



$$M = \int_0^1 \left(y + 2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{-2x+2} dx = \int_0^1 (4-4x^2) dx = \left(4x - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$